

Chapitre 1 : Arithmétique

Nous allons utiliser un moyen original pour dessiner les tables de multiplications.

Dans la situation ci-dessous, des cercles ont été partagés comme une horloge en 12 sections égales.

Comme pour les heures, après le nombre 11 on ne trouve pas 12 mais 0. De cette manière, on positionnera le nombre 13 à la même place que nombre 1 puisque $13 = 12 + 1$.

Voici comment nous allons représenter graphiquement la table de 2 :

- Il faut tracer 11 segments en partant successivement des nombres 1, 2, 3 ...
- comme $1 \times 2 = 2$, on relie les nombres 1 et 2
- comme $2 \times 2 = 4$, on relie les nombres 2 et 4
- quand le résultat dépasse 11, on procède comme pour les heures
- on effectue ces opérations et ces tracés jusqu'au nombre 11

Représenter graphiquement dans le premier cercle la table de 2 en suivant la méthode ci-dessus.

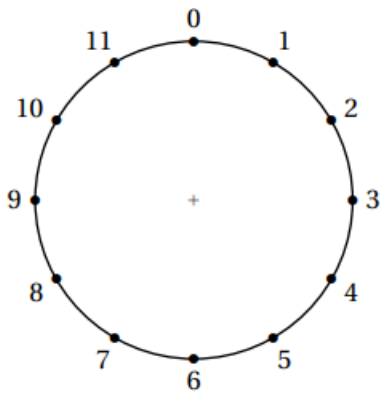


Table de 2

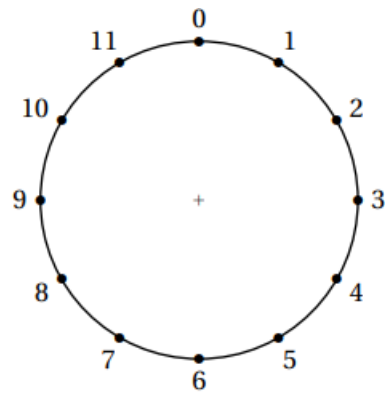


Table de 3

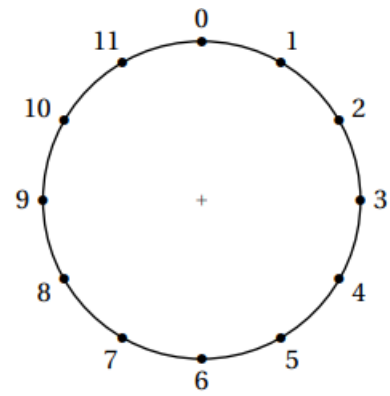


Table de 4

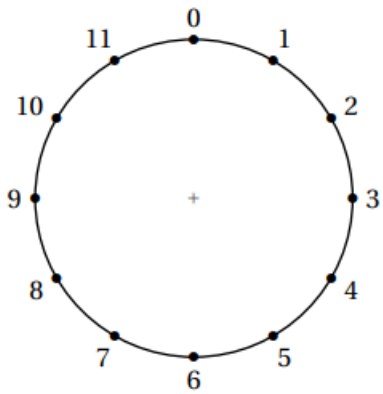


Table de 5

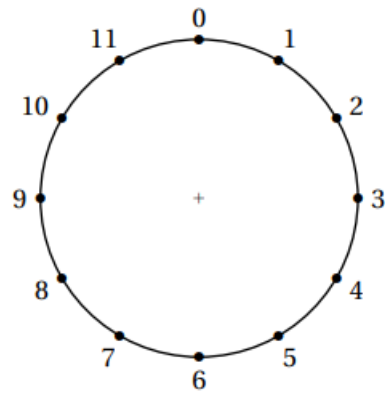


Table de 6

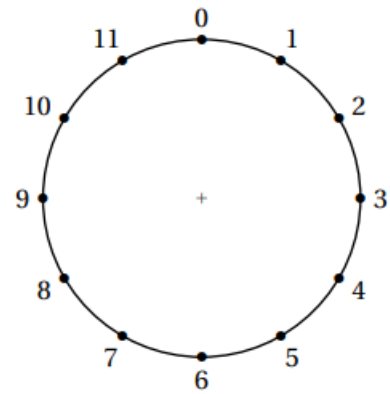


Table de 7

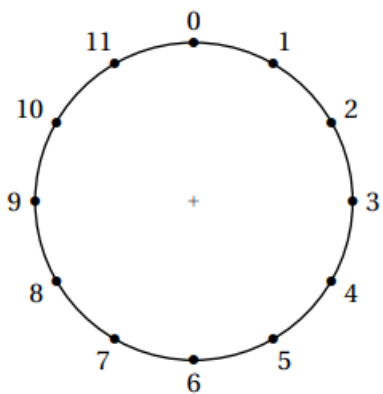


Table de 8

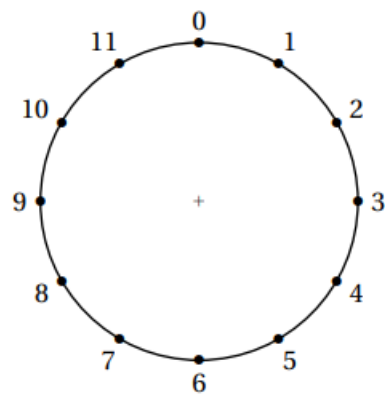


Table de 9

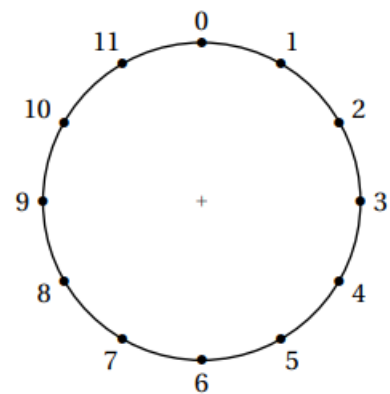
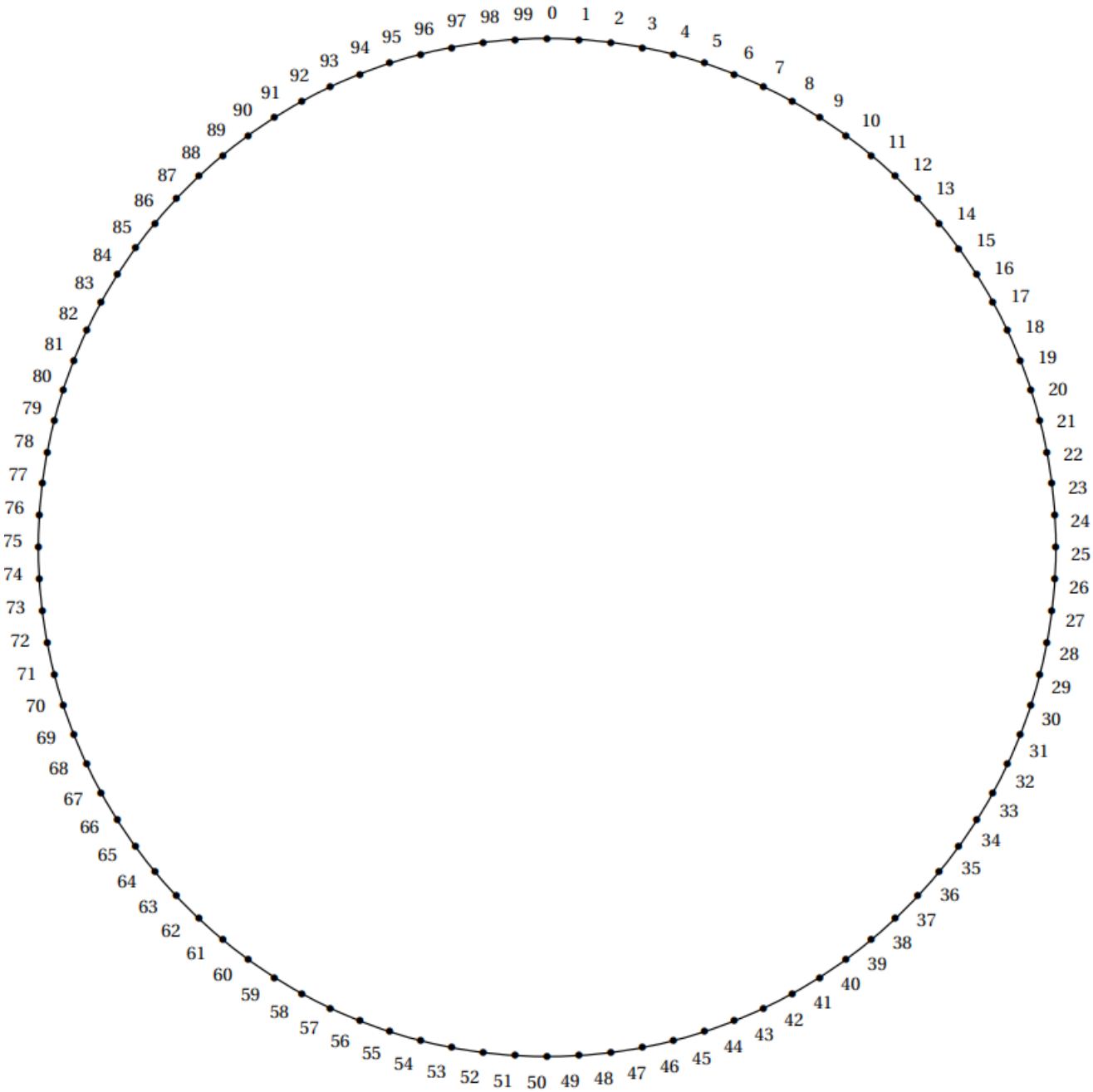


Table de 10

Ensuite, représenter graphiquement les tables de 3 à 10 sur les cercles suivants.

Il ne reste plus qu'à admirer les résultats!

Cette fois, prenons plus d'entiers i.e découpons notre cercle en 100.



Ces courbe semblent être des épicycloïdes ! Ces courbes correspondent à celles produites par un cercle circulant à l'extérieur d'un autre cercle. Elles ont été longtemps les modèles pour la trajectoire des planètes.

📌 Pour info
Pour la table de 2, cette courbe se nomme une cardioïde et pour la table de 3, cette courbe se nomme une néphroïde.

Les hiéroglyphes

UN CHIFFRE INSPIRÉ PAR LES HIÉROGLYPHES

L'écriture hiéroglyphique remonte aux années 3250/3200 avant notre ère. Elle fut employée pendant plus de 3000 ans. En 1821, Jean-François Champollion déchiffre pour la première fois cette écriture sur la pierre de Rosette.

Le cryptogramme ci-dessous est inspiré par les caractères hiéroglyphique, mais il n'a aucun rapport avec l'écriture égyptienne qui était beaucoup plus complexe.

🔓 À vous de décrypter cette citation du mathématicien et philosophe français Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 1623 — Paris 1662) en utilisant les indices suivants :

- dans ce code un symbole représente une lettre unique de l'alphabet;
- le dernier mot de ce cryptogramme est « MATHEMATIQUES ».



DÉCRYPTAGE :

Le système Maya

La civilisation Maya est une ancienne civilisation principalement connue pour ses avancées dans les domaines de l'écriture, de l'art, de l'architecture, de l'agriculture, des mathématiques et de l'astronomie. C'est une des plus anciennes civilisations d'Amérique : ses origines remontent à la préhistoire.

Les Mayas sont demeurés ignorés des chercheurs jusqu'au début du XIX^e siècle. La forêt avait repris ses droits sur la plupart de leurs cités, et, peu après la conquête espagnole, aux XVI^e et XVII^e siècles, les prêtres européens avaient brûlé la quasi-totalité des livres en écorce de figuier laissés par les Mayas.



Les Mayas utilisaient une numération positionnelle vicésimale (en base vingt). Les chiffres étaient écrits du bas vers le haut. Le premier chiffre est celui des unités, le deuxième celui des vingtaines puis chaque étage correspond à 20 fois l'étage précédent (1; 20; 20 × 20 = 400; 20 × 400 = 8000...).

Voici leurs chiffres :

	○	○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○ ○	—	— ○	— ○ ○	— ○ ○ ○	— ○ ○ ○ ○
Zéro	Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six	Sept	Huit	Neuf
Dix	Onze	Douze	Treize	Quatorze	Quinze	Seize	Dix-sept	Dix-huit	Dix-neuf

Écrire sous forme décimale les nombres Mayas suivants :

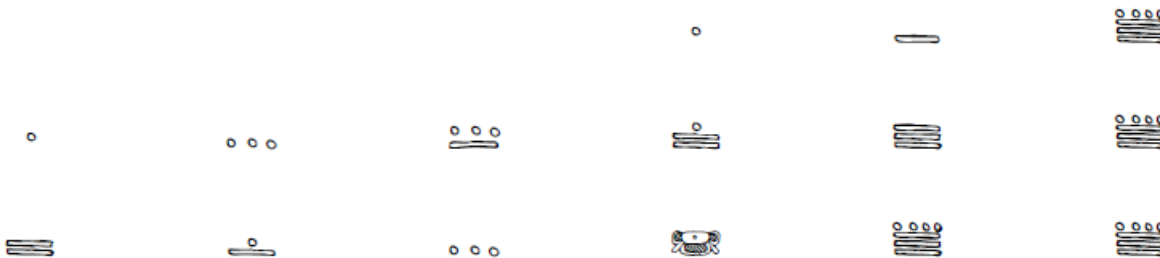


Table des matières

I	L'écriture des nombres entiers	8
I.1	Écriture positionnelle	8
I.2	Écriture en toutes lettres	9
II	Repérer et ordonner	11
II.1	Repérer	11
II.2	Comparer	12
II.3	Encadrer et intercaler	12
III	Somme, différence et produit de nombres entiers	13
III.1	Définition et priorité	13
III.2	Algorithme de calculs	13

Objectifs

- Savoir composer, décomposer les grands nombres entiers, en utilisant des regroupements par milliers
- Savoir utiliser les unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et leurs relations
- Comprendre et appliquer les règles de la numération aux grands nombres (jusqu'à 12 chiffres)
- Savoir comparer, ranger, encadrer des grands nombres entiers, les repérer et les placer sur une demi-droite graduée adaptée

Question

Qu'est-ce-que l'arithmétique ?

Définition

L'arithmétique est la branche des Mathématiques qui porte sur l'étude des nombres entiers, notamment les entiers naturels, ceux que vous utilisez depuis l'école primaire pour compter.

Question

Quand sont apparus les nombres ?

Réponse

L'idée de quantité et la notion de nombre sont vraisemblablement antérieures à l'apparition de l'écriture.

Plusieurs procédés de comptage se sont progressivement développés pour décrire la taille d'un troupeau, contrôler son évolution, suivre un calendrier ou mesurer des récoltes.

Au IV^{ème} millénaire avant notre ère, les civilisations mésopotamiennes utilisent ainsi des boules creuses d'argile contenant des jetons, puis des tablettes d'argile munies de marques. Il faut attendre la fusion de ces systèmes, à la fin du III^{ème} millénaire avant notre ère, pour voir se former véritablement le concept du nombre abstrait, indépendamment de ses réalisations concrètes.

La graphie des chiffres arabes pourrait s'inspirer d'une numération décimale non positionnelle indienne datant du III^{ème} siècle av. J.-C., la numération Brahmi. Les chiffres arabes ont gagné l'Europe au X^{ème} siècle par la péninsule ibérique. Puis leur diffusion dans le reste de l'Occident s'est poursuivie par divers modes. Certains attribuent un rôle majeur de diffusion des chiffres arabes au mathématicien italien Leonardo Fibonacci (1175-1250), qui avait étudié auprès de professeurs musulmans à Béjaïa (dans l'actuelle Algérie), ramena à Pise en 1198 une partie de leur savoir et publia, en 1202, le Liber Abaci (Le livre du calcul), un traité sur les calculs et la comptabilité fondée sur le calcul décimal.

Pour info

Le mot calcul vient du latin calculus (« caillou »). Il est dit que les bergers comptaient leurs moutons avec des cailloux dans un pot à l'entrée et à la sortie de la bergerie. Ces objets pouvaient aussi être façonnés en argile sous la forme de demi-sphère, de sphère, de conoïde...

I L'écriture des nombres entiers

I.1 Écriture positionnelle

Définition (Écriture positionnelle)

Les entiers naturels sont les nombres qui permettent de compter des objets.

Un nombre entier peut s'écrire en utilisant les 10 chiffres indo-arabes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

On utilise pour cela la notation positionnelle où chaque chiffre a un sens différent suivant sa position dans le nombre.

Exemple

Milliards			Millions			Milliers			Unités simples		
C	D	U	C	D	U	C	D	U	Centaines	Dizaines	Unités
								2	0	1	9
				1	2	3	4	5	6	7	8
9	0	8	0	7	0	6	0	5	0	4	1

Remarque

On peut décomposer un nombre de plusieurs manières différentes, ce qui permet de mettre en évidence le nombre de dizaine, de centaine, ... d'un nombre

Exemple

$2023 = 202 \times 10 + 3$ et $2023 = 2 \times 1000 + 23$ donc 2023 a 202 dizaines et 2 milliers.

Méthode

Pour déterminer le nombre de centaines (par exemple), on écrit le nombre sous la forme $* \times 100 + **$.

Par exemple, $12056 = 120 \times 100 + 56$

⚡ Pour info

Cette opération est appelée division euclidienne

I.2 Écriture en toutes lettres

Propriété (en lettres)

En lettres, les nombres s'écrivent en utilisant des traits d'union.

Pour info

Vingt et cent prennent la marque du pluriel s'ils terminent un nombre et mille est invariable

Application

Écrire en lettres les nombres 2023, 12345, 12000, 500.

Ordonner des nombres

§ SITUATION INITIALE : La population mondiale

Il y a en 2019 environ 7 726 331 078 habitants sur la planète.

Voici la liste alphabétique des 20 pays les plus peuplés en 2019 :

- **Allemagne** (Europe) — 82 850 000 habitants — BERLIN — 357 022 km^2 ;
- **Bangladesh** (Asie) — 160 339 154 habitants — DACCA — 143 998 km^2 ;
- **Brésil** (Amérique) — 207 096 196 habitants — BRASILIA — 851 4876 km^2 ;
- **Chine** (Asie) — 1 415 045 928 habitants — PÉKIN — 959 6560 km^2 ;
- **Égypte** (Afrique) — 99 375 741 habitants — LE CAIRE — 1 001 450 km^2 ;
- **États-Unis** (Amérique) — 328 386 400 habitants — WASHINGTON — 983 3517 km^2 ;
- **Éthiopie** (Afrique) — 102 374 044 habitants — ADDIS-ABEBA — 1 127 127 km^2 ;
- **France** (Europe) — 66 993 000 habitants — PARIS — 632 734 km^2 ;
- **Inde** (Asie) — 1 355 621 800 habitants — NEW DELHI — 3 287 263 km^2 ;
- **Indonésie** (Asie) — 266 471 000 habitants — JAKARTA — 1 904 569 km^2 ;
- **Iran** (Asie) — 82 801 633 habitants — TÉHÉRAN — 1 648 195 km^2 ;
- **Japon** (Asie) — 126 420 000 habitants — TOKYO — 377 915 km^2 ;
- **Mexique** (Amérique) — 126 577 691 habitants — MEXICO — 1 964 375 km^2 ;
- **Nigeria** (Afrique) — 190 632 261 habitants — ABUJA — 923 768 km^2 ;
- **Pakistan** (Asie) — 207 774 520 habitants — ISLAMABAD — 881 913 km^2 ;
- **Philippines** (Asie) — 107 008 620 habitants — MANILLE — 300 400 km^2 ;
- **République Démocratique du Congo** (Afrique) — 86 895 206 habitants — KINSHASA — 2 345 410 km^2 ;
- **Russie** (Asie) — 146 544 710 habitants — MOSCOU — 17 125 191 km^2 ;
- **Turquie** (Asie) : 82 835 090 habitants — ANKARA — 783 562 km^2 ;
- **Viêt Nam** (Asie) — 91 700 000 habitants — HANOI — 330 967 km^2 .

1. Quelles sont les informations fournies pour chaque pays ?
2. Pour chaque continent, quel est le pays le plus peuplé ?
3. Classer ces pays dans l'ordre décroissant de leur population ?
4. Classer ces pays dans l'ordre croissant de leur superficie ?
5. Il y a-t-il un lien entre la taille de la population et la superficie d'un pays ?

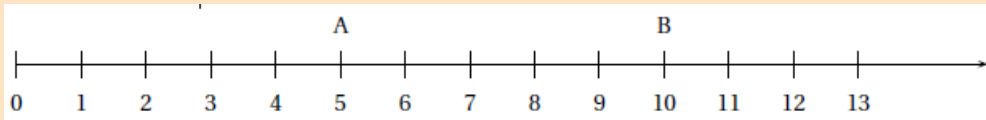
II Repérer et ordonner

II.1 Repérer

Définition (La droite graduée)

On représente les nombres entiers sur une demi-droite graduée. Cette demi-droite est constituée :

- d'une origine qui correspond au nombre 0
- d'une unité qui indique le pas sur la demi-droite
- d'un sens de lecture

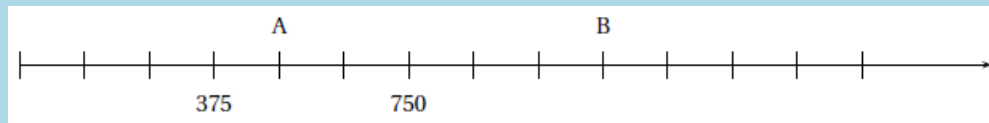


✎ Pour info

On dit que 5 est l'abscisse du point A et que 10 est l'abscisse du point B.

Méthode

L'unité n'est pas toujours clairement indiquée de sur une droite graduée :



Dans cette situation, il y a 3 graduations entre 375 et 750.

L'écart entre 750 et 375 est $750 - 375 = 375$.

Or, $375 \div 3 = 125$ donc chaque graduation représentent 125 unités.

Ainsi A a pour abscisse $375 + 125 = 500$ et B pour abscisse $725 + 3 \times 125 = 1100$.

II.2 Comparer

Définition (Symboles de comparaison)

Nous utilisons 3 symboles de comparaison :

- = égal : permet d'indiquer que deux expressions correspondent au même nombre : $3 + 4 = 7$
- < inférieur (strictement) ou plus petit : indique que l'expression de gauche est plus petite que celle de droite $8 < 9$
- > supérieur (strictement) ou plus grand : indique que l'expression de gauche est plus grande que celle de droite $10 + 1 > 10 - 1$

Classer des nombres dans l'ordre croissant signifie les classer du plus petit au plus grand.

Classer des nombres dans l'ordre décroissant signifie les classer du plus grand au plus petit.

Méthode

Si un nombre entier a plus de chiffres qu'un autre il est plus grand et s'ils ont le même nombre de chiffres, on compare chacun d'entre eux en commençant par la gauche.

Exemple

$23987 > 234$ et $12456 > 12254$.

II.3 Encadrer et intercaler

Définition

Encadrer un nombre, c'est trouver deux nombres tels que l'un soit plus petit et l'autre plus grand.

Intercaler un nombre entre deux nombres, C'est trouver un nombre qui soit compris entre les deux nombres.

Pour info

Il existe une infinité de façons d'encadrer un nombre entier naturel et entre deux nombres entiers naturels il existe une infinité de nombres

Application

Encadrer 12458 et intercaler un nombre entre 1789 et 2024

III Somme, différence et produit de nombres entiers

III.1 Définition et priorité

Définition

- Le résultat d'une addition de termes est appelée une somme
- Le résultat d'une soustraction de termes est appelée une différence
- Le résultat d'une multiplication de facteurs est appelée un produit

Propriété (Priorité des opérations)

Dans un calcul comportant des additions (des soustractions) et des multiplications, les multiplications sont prioritaires.

Si on veut rendre prioritaire des additions (des soustractions), on utilise des parenthèses.

Application

Calculer $123 + 4 \times 6$ et $(123 + 4) \times 6$.

III.2 Algorithme de calculs

Propriété (La somme)

On place les nombres les uns en dessous des autres en alignant les chiffres. On effectue la somme de chaque colonne, on écrit le chiffre des unités de cette somme en bas de la colonne et le nombre de dizaine au sommet de la colonne de chiffres suivante sous forme de retenue.

Exemple

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ + \\ \hline 6 \end{array}$$

Propriété (La différence)

On place le plus grand nombre en premier puis le second en dessous en alignant les chiffres. Quand le chiffre du dessus est inférieur à celui du dessous on retire une unité au chiffre suivant ce qui permet d'ajouter 10 et d'effectuer la soustraction.

Exemple

$$\begin{array}{r} 69916 \\ - 2019 \\ \hline 67897 \end{array}$$

Propriété (Le produit)

On place les deux nombres l'un en dessous de l'autre puis on effectue des multiplications successives.

Exemple

$$\begin{array}{r} 2019 \\ \times 678 \\ \hline 16152 \\ 14133 \cdot \\ 12114 \cdot \cdot \\ \hline 1368882 \end{array}$$

✍ Pour info

On commencera par effectuer 8×2019 puis 7×2019 puis 6×2019